



MECANIQUE

Le sujet de mécanique comprend deux exercices indépendants

EXERCICE 1

Le référentiel terrestre (\mathcal{R}) est supposé galiléen.

On considère un demi cylindre C_0 , de centre O_0 , fixe par rapport à (\mathcal{R}), d'axe Δ et de rayon R .

Un cylindre C de centre O , plein, homogène, de masse m , de rayon r et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mr^2$ par rapport à son axe de rotation roule sans glisser à l'intérieur de C_0 de manière à ce que la génératrice de contact soit constamment parallèle à Δ .

Dans un plan perpendiculaire à Δ , on repère la position de C par :

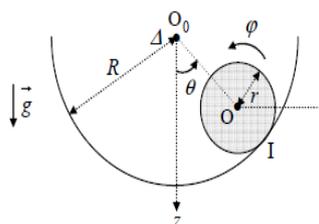
- L'angle θ que fait O_0O avec la verticale descendante O_0z ;
- L'angle φ que fait OM avec l'axe horizontal Ox , M étant un point quelconque du cylindre C .

On note $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ les dérivées par rapport au temps $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$.

Soit \vec{g} le champ de pesanteur terrestre, on prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Q1. La relation liant $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, R et r traduisant la condition de roulement sans glissement est :

A : $(R + r)\dot{\theta} + r\dot{\varphi} = 0$ B : $(R - r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = 0$
C : $(R - r)\dot{\theta} + r\dot{\varphi} = 0$



Q2. L'expression de l'énergie cinétique E_c du cylindre C en fonction de m , R , r et $\dot{\theta}$ est :

A : $E_c = \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2$ B : $E_c = \frac{3}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}^2$ C : $E_c = \frac{1}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2$

Q3. L'expression de l'énergie potentielle E_p du cylindre C dans (\mathcal{R}) s'écrit :

A : $E_p = -mg(R - r)\sin(\theta)$ B : $E_p = -mg(R - r)\cos(\theta)$ C : $E_p = mg(R - r)\cos(\theta)$

Q4. L'énergie mécanique du cylindre C est constante. En notant θ_0 et $\dot{\theta}_0$ les valeurs initiales de θ et $\dot{\theta}$ l'expression de l'énergie mécanique s'écrit :

A : $E_m = \frac{3}{2}m(R - r)\dot{\theta}^2 - mg\cos(\theta) = \frac{3}{2}m(R - r)\dot{\theta}_0^2 - mg\cos(\theta_0)$

B : $E_m = \frac{1}{4}m(R - r)\dot{\theta}^2 - mg\cos(\theta) = \frac{1}{4}m(R - r)\dot{\theta}_0^2 - mg\cos(\theta_0)$

C : $E_m = \frac{3}{4}m(R - r)\dot{\theta}^2 - mg\cos(\theta) = \frac{3}{4}m(R - r)\dot{\theta}_0^2 - mg\cos(\theta_0)$

Q5. L'équation différentielle obtenue en différenciant par rapport au temps la relation précédente est

A : $\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\sin(\theta) = 0$ B : $\ddot{\theta} + \frac{g}{3(R-r)}\sin(\theta) = 0$ C : $\ddot{\theta} + \frac{2g}{(R-r)}\sin(\theta) = 0$

Q6. On se place dans l'hypothèse des oscillations de faible amplitude. Le mouvement de C est sinusoïdal. L'expression de la période T_0 est :

$$A : T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)}{2g}} \quad B : T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{g}} \quad C : T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

EXERCICE 2

Un physicien pose distraitemment sa tartine beurrée en déséquilibre au bord de la table, coté beurré vers le haut (fig 1). La tartine tombe et atterrit sur le côté beurré, ce qui ne manque pas d'attirer l'attention du physicien. Répétant l'expérience avec méthode et circonspection, notre héros observe la répétitivité du phénomène et le modélise

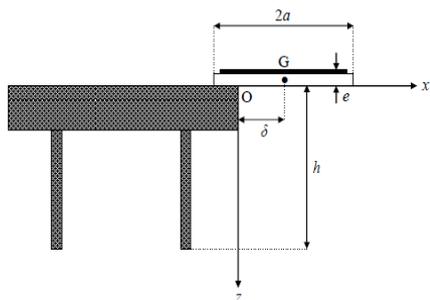


Figure 1 : tartine sur table

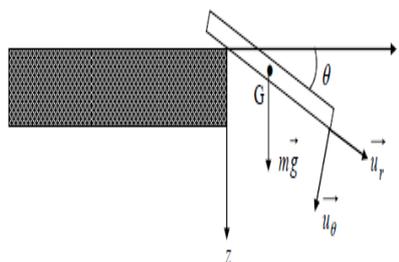


Figure 2 : chute d'une tartine

Une tartine rectangulaire de longueur $2a$, de largeur $2b$ et d'épaisseur e de masse m uniformément répartie est placée au bord d'une table de hauteur h . Le mouvement est décrit dans le repère $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, direct et supposé galiléen. O est sur le bord de la table, l'axe Ox est horizontal dirigé vers l'extérieur de la table, l'axe Oy est porté par le rebord de la table, l'axe Oz , vertical est dirigé vers le bas. Les petits côtés de la tartine sont parallèles à Oy .

A l'instant initial, la tartine, supposée d'épaisseur nulle, est horizontale, sa vitesse est nulle. Les coordonnées de son centre de masse G sont $(\delta, 0, 0)$. La tartine amorce une rotation sans glissement autour de l'axe Oy du bord de la table. A l'instant t , la tartine est repérée par l'angle θ . la vitesse angulaire est notée $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe Gy , parallèle à Oy et passant par G est $J_{Gy} = \frac{1}{3}ma^2$ et par rapport à l'axe Oy il est $J_{Oy} = J_{Gy} + m\delta^2 = m(\frac{a^2}{3} + \delta^2)$

Q7. On introduit les réactions tangentielle et normale de la table en O , notées respectivement T et N dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Par projection du théorème du centre de masse dans la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, on a les relations suivantes :

$$A : -m\delta\dot{\theta}^2 = mgsin(\theta) - T \quad \text{et} \quad m\delta\ddot{\theta} = mgcos(\theta) + N$$

$$B : -m\delta\dot{\theta}^2 = mgsin(\theta) + T \quad \text{et} \quad m\delta\ddot{\theta} = mgcos(\theta) - N$$

$$C : -m\delta\dot{\theta}^2 = mgsin(\theta) - T \quad \text{et} \quad m\delta\ddot{\theta} = mgcos(\theta) - N$$

Q8. On définit le coefficient de surplomb par $\eta = \frac{\delta}{a}$; (la distance δ est appelée distance de surplomb). En appliquant le théorème du moment cinétique pour la tartine et en projetant sur l'axe Oy on obtient l'équation suivante :

$$A : \ddot{\theta} = \frac{g}{a} \frac{3\frac{\delta}{a}}{1+3\frac{\delta^2}{a^2}} \cos(\theta) \quad B : \ddot{\theta} = \frac{g}{a} \frac{3\frac{\delta}{a}}{1-3\frac{\delta^2}{a^2}} \cos(\theta) \quad C : \ddot{\theta} = \frac{g}{a} \frac{3\frac{\delta}{a}}{1+3\frac{\delta^2}{a^2}} \sin(\theta)$$

Q9. La tartine quitte la table à l'instant pris comme origine des temps, l'angle θ vaut alors $\frac{\pi}{2}$, la vitesse angulaire initiale est ω_0 . On suppose que le mouvement reste plan et qu'il n'y a pas de contact ultérieur avec la table. La loi d'évolution ultérieure de l'angle θ s'écrit :

$$A : \theta(t) = \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \quad B : \theta(t) = \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \quad C : \theta(t) = \omega_0 t + \frac{3\pi}{2}$$

Q10. On considère que, lorsque la tartine atteint le sol, à l'instant τ , elle ne subit pas de rebond et que toute son énergie cinétique devient négligeable. L'angle limite θ_1 tel que la tartine atterrisse côté pain en admettant qu'elle fasse moins d'un tour avant de toucher le sol est :

$$A : \theta_1 = \frac{3\pi}{2}$$

$$B : \theta_1 = \frac{-3\pi}{2}$$

$$C : \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

Q11. On suppose $\eta \ll 1$ ($\delta \ll a$). La chute commence lorsque le centre de masse G de la tartine est presque en O, le temps de chute est alors :

$$A : \tau = \sqrt{\frac{3h}{g}}$$

$$B : \tau = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

$$C : \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

OPTIQUE

I) Trou d'Young.

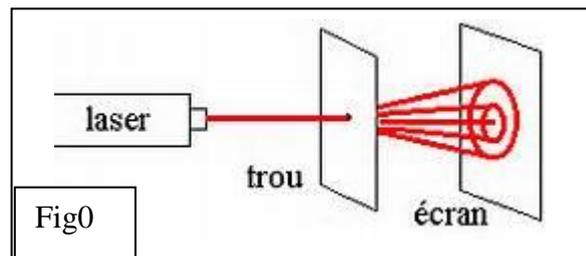
Un Laser envoie, sur un trou circulaire de faible d percé dans un plan π_0 , un faisceau de lumière monochromatique, de longueur d'onde dans le

(Fig 0). On observe la figure 1 sur écran π_E placé distance D de π_0 (π_E et π_0 sont parallèles).

Le faisceau incident se propage dans l'air (indice N_a) dans la direction $X'X$ perpendiculaire aux plans.

On associe au plan π_E un repère ($Y'Y, Z'Z$).

La figure 2 donne, en fonction de z , l'intensité lumineuse I observée sur π_E .



diamètre
parallèle
vide λ_0
à la
absolu

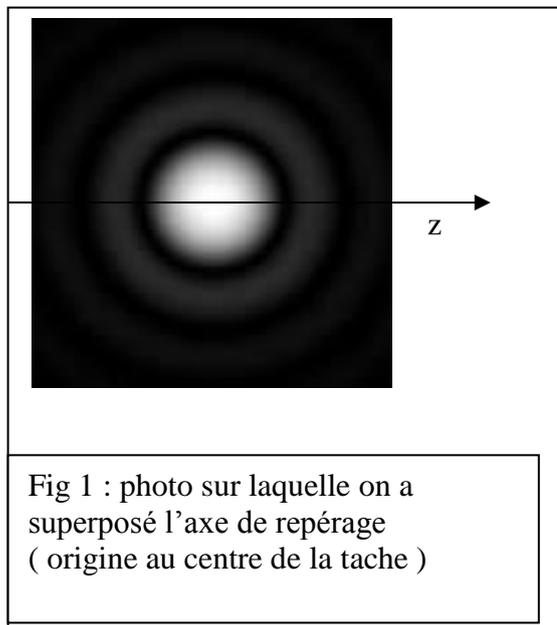
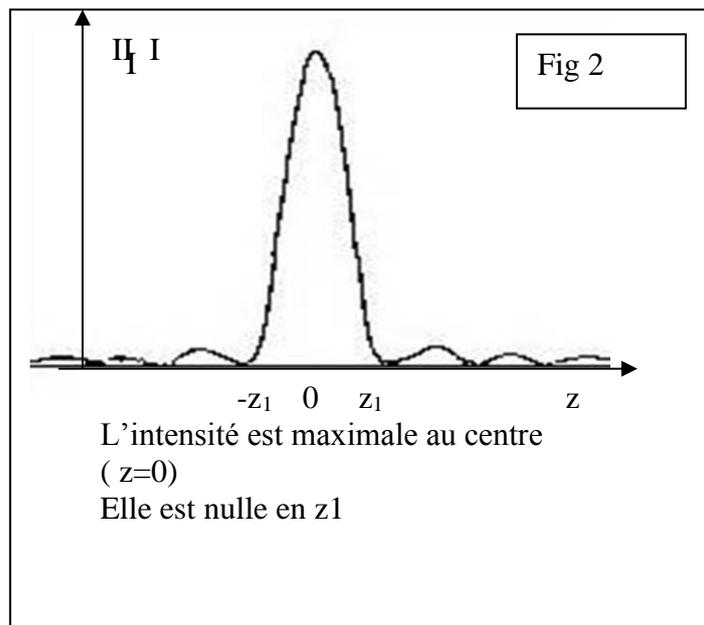


Fig 1 : photo sur laquelle on a superposé l'axe de repérage (origine au centre de la tache)



L'intensité est maximale au centre ($z=0$)
Elle est nulle en $z1$

1°)

Q12 Le phénomène physique mis en jeu est :

A Interférence d'une onde lumineuse B Diffraction d'une onde lumineuse C : Autre

Q13 Le rayon R de la tache centrale, supposé égal à z_1 , est donné par une des relations suivantes : (K est une constante sans dimension dépendant de la géométrie dont la valeur approchée est $K = 1,2$ pour un trou circulaire).

$$A : K \frac{\lambda_0 D}{Na d}$$

$$B : K \frac{\lambda_0 D}{Na d^2}$$

$$C : K \frac{\lambda_0 d}{Na D}$$

2°) On peut considérer que le trou d'Young se comporte comme une source lumineuse, notée S, quasi ponctuelle, émettant de la lumière dans un cône d'ouverture θ correspondant à la tache centrale de la figure 1.

Q14 L'expression de $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est :

A : $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R}{D}$ B : $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R}{d}$ C : $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{D}{R}$

Q15 L'angle θ vaut alors

A : $2 \cdot \arctan K \frac{\lambda_0 D}{Na d^3}$ B : $2 \cdot \arctan K \frac{\lambda_0 1}{Na d}$ C : $2 \cdot \arctan \frac{Na D^2}{Kd \lambda_0}$

Dans toute la suite, les trous d'Young seront assimilés à une telle source ponctuelle.

II) dispositif interférentiel à deux trous d'Young.

Le dispositif est le même qu'en I, mais le faisceau arrive sur deux trous d'Young percés dans le plan π_0 (fig 3). Ces trous d'Young, éclairés par un faisceau incident parallèle se propageant dans la direction OX, se comportent comme deux sources lumineuses S1, S2 ponctuelles, monochromatiques, synchrones, cohérentes, distantes de b (fig 3a) ; ces deux sources émettent une même lumière de longueur d'onde dans le vide λ_0 . Elles sont symétriques par rapport à l'axe OX.

Ces ondes se propagent dans l'air d'indice optique absolu N_a .

On utilise le repère {OXYZ}, l'origine O étant au milieu de S1S2 (Fig3).

On observe des interférences dans la zone commune d'éclairement du plan π_E .

Cette zone est sensiblement un disque de rayon $R = 1$ cm (Fig 3 et 3b).

On s'intéresse aux phénomènes en un point M ($x=D, y, z$) du plan π_E .

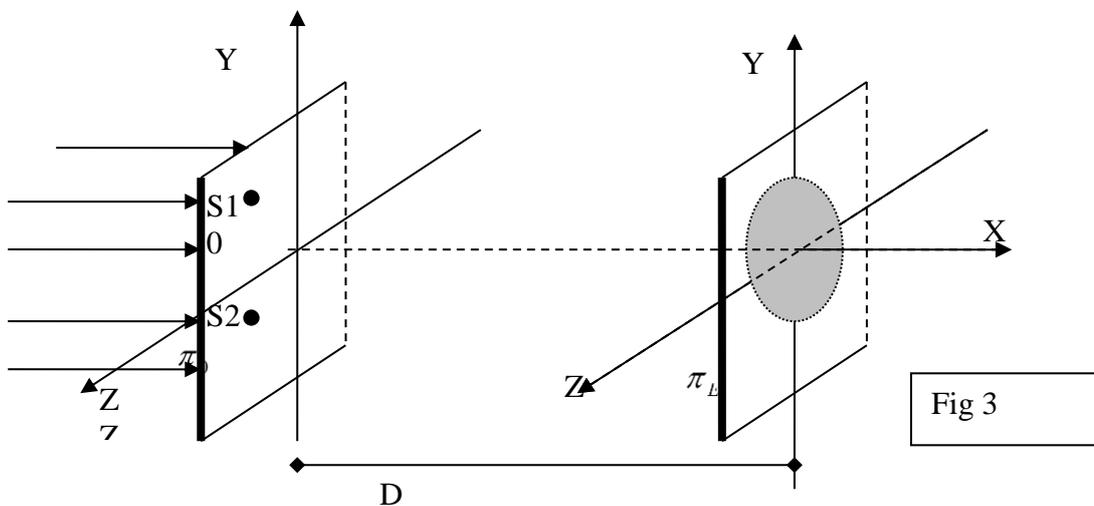


Fig 3a: Vue en coupe

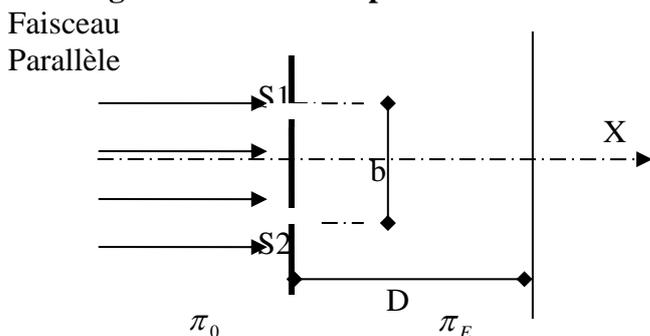
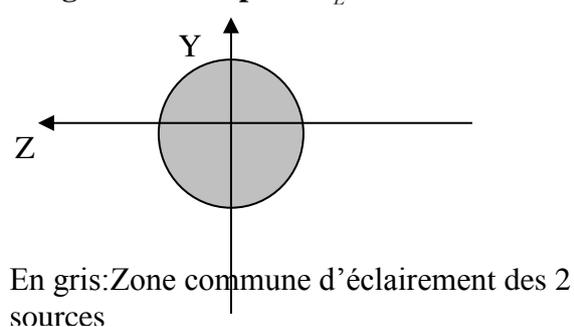


Fig 3b: vue du plan π_E



Q16 Deux sources sont synchrones si elles ont :

A : Même pulsation B : Des pulsations différentes C : Même phase.

2°) Les distances séparant les sources du point M (de coordonnées D,y,z) sont notées respectivement $d_1 = S_1M$ et $d_2 = S_2M$.

Q17 L'expression de d_2 en fonction de y, z D et b est :

$$A : d_2 = \sqrt{D^2 + (y - b/2)^2 + z^2} \quad B : d_2 = \sqrt{D^2 - (y + b/2)^2 + z^2} \quad C : d_2 = \sqrt{D^2 + (y + b/2)^2 + z^2}$$

Q18 L'expression de d_1 en fonction de y, z D et b est :

$$A : d_1 = \sqrt{D^2 + (y - b/2)^2 - z^2} \quad B : d_1 = \sqrt{D^2 + (y - b/2)^2 + z^2} \quad C : d_1 = \sqrt{D^2 - (y - b/2)^2 + z^2}$$

Q19 La différence de marche $\Delta = d_2 - d_1$ lorsque y, z et b sont très petits devant D est :

$$A : \Delta = \frac{y \cdot b}{z \cdot D} \quad B : \Delta = \frac{z \cdot b}{D} \quad C : \Delta = \frac{y \cdot b}{D}$$

Q20 Relier la différence de chemin optique $\delta_{2/1}$, Δ et l'indice absolu de l'air N_a .

$$A : \delta_{2/1} = N_a \cdot \Delta \quad B : \delta_{2/1} = \frac{N_a}{\Delta} \quad C : \delta_{2/1} = N_a + \Delta$$

Q21 L'intensité lumineuse au point M est de la forme (k est une constante)

$$A : I = k \cdot (1 + \cos(\alpha)) \quad B : I = k \cdot (1 - \cos(\alpha)) \quad C : I = k \cdot (\cos(\alpha))$$

Q22 Expliciter α en fonction de $\delta_{2/1}$ et λ_0 .

$$A : \alpha = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\lambda_0}{\delta_{2/1}} \quad B : \alpha = 2 \cdot \pi \cdot \delta_{2/1} \cdot \lambda_0 \quad C : \alpha = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\delta_{2/1}}{\lambda_0}$$

Q23 Quelle est l'expression de l'interfrange ?

$$A : \frac{D \lambda_0}{N_a \cdot b} \quad B : \frac{D \lambda_0}{N_a \cdot b} \quad C : \frac{D \lambda_0}{N_a \cdot d}$$

Q24 Evaluer le nombre de franges d'intensité maximale observable avec : $\lambda_0 = 500\text{nm}$,

$b = 2\text{mm}$, $N_a \cong 1$; $D = 2\text{m}$.

A : 38 franges B : 40 franges C : 42 franges